Dispersionsbeziehung für den Prozeß $\pi+\mathrm{N}\rightarrow\pi'+\pi''+\mathrm{N}'$ in Fixed-Nukleon-Näherung

Von W. Zöllner, O. Chrustalow, W. Serebrjakow und A. Lesnow

Aus dem Laboratorium für Theoretische Physik des Vereinigten Institutes für Kernforschung, Dubna (USSR)

(Z. Naturforschg. **13 a**, 499—505 [1958]; eingegangen am 24. März 1958)

Es wird eine Dispersionsbeziehung für den Prozeß $\pi+\mathrm{N}\rightarrow\pi'+\pi''+\mathrm{N}'$ in Fixed-Nukleon-Näherung mit Hilfe des von Bogoljubow entwickelten Schemas aufgestellt. Es zeigt sich, daß ein beträchtlicher Teil des nichtbeobachtbaren Bereiches von einem kontinuierlichen Spektrum bedeckt ist. Seine genäherte Berücksichtigung führt zu komplizierten Integralgleichungen zwischen den hermiteschen und antihermiteschen Teilen der Amplituden. Die gewonnene Dispersionsbeziehung wird benutzt, um eine allen Symmetrieanforderungen genügende Beziehung von der Art der Chew–Low-Gleichungen aufzustellen.

Die Bogoljubowsche Methode der Variationsableitungen der S-Matrix [1] wird benutzt, um die retardierten und avancierten Matrixelemente des Prozesses $\pi+\mathrm{N}\rightarrow\pi'+\pi''+\mathrm{N}'$ in nichtrelativistischer Näherung anzugeben, wodurch die Aufstellung der Dispersionsbeziehung möglich wird.

Die Unzulänglichkeit einer nichtrelativistischen Untersuchung bei den auftretenden Energien liegt auf der Hand. Die Erfolge dieser Betrachtungsweise bei der elastischen Streuung rechtfertigen jedoch den Versuch ihrer Anwendung auf die π-Mesonen-Erzeugung.

Es ist bekannt, daß ein besonderer Vorzug der Dispersionsbeziehungen darin besteht, daß sie in gewisser Weise unabhängig sind von konkreten Einzelheiten des jeweiligen Prozesses. Das gilt auch für die hier durchgeführten nichtrelativistischen Betrachtungen.

Zur physikalischen Erläuterung der auftretenden Größen, wie z. B. der Variationsableitungen der S-Matrix nach den Feldern der π-Mesonen, werden wir einen bestimmten Lagrange-Operator angeben. Man kann aber leicht sehen, daß die Betrachtungen nicht von dieser speziellen Wahl oder etwa einer speziellen Darstellung abhängen, sondern allgemeinere Bedeutung besitzen. Das gilt insbesondere auch für die in Abschnitt IV abgeleitete Chew–Low-Gleichung für den Prozeß $\pi+\mathrm{N}\rightarrow\pi'+\pi''+\mathrm{N}'$.

Die durchgeführten Untersuchungen stehen in engem Zusammenhang zu den Arbeiten [2, 6] von Logunow und Tawxelidse.

I. Die Aufstellung der retardierten und avancierten Matrixelemente

Der Lagrange-Operator der Wechselwirkung eines π-Mesonen-Feldes mit einem festen ausgedehnten Nukleon, das bei der Wechselwirkung keinen Rückstoß erleidet, läßt sich in der folgenden Form schreiben:

$$L(t) = -J_{\gamma\varrho}(t)\,\varphi_{\gamma\varrho}(t), \tag{1}$$

wobei

$$J_{\gamma\varrho}(t) = \frac{f^0}{\mu}\,\psi^+(t)\,\tau_\varrho\,\sigma_\gamma\,\psi(t), \tag{2}$$

$$\varphi_{\gamma\varrho}(t) = -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{\mathrm{d}\mathfrak{q}}{\sqrt{2E}}\Big\{\overset{(+)}{a}_\varrho(\mathfrak{q})\,e^{iEt} - \overset{(-)}{a}_\varrho(\mathfrak{q})\,e^{-iEt}\Big\}\,q^\gamma\,v(|\mathfrak{q}|). \tag{3}$$

$v(|\mathfrak{q}|)$ ist die Fourier-Transformierte der festen ausgedehnten Nukleonen-Quelle.

Um die physikalische Bedeutung der Variationen der S-Matrix nach den Feldern $\varphi(t)$ der π-Mesonen zu erkennen, schreiben wir die S-Matrix in der Form

$$S = T\left(\exp\left\{i\int_{-\infty}^{+\infty}L(t')\,\mathrm{d}t'\right\}\right). \tag{4}$$

Man erhält

$$\frac{\delta S}{\delta\varphi(t)} = -i\,U(\infty,t)\,J(t)\,U(t,-\infty), \tag{5}$$

wobei $S=S(+\infty,-\infty)=U(+\infty,t)\,U(t,-\infty)$. Als Asymptotenbedingung wollen wir Übereinstimmung zwischen Heisenberg- und Wechselwirkungs-

[1] Siehe z. B. N. N. Bogoljubow u. D. W. Schirkow, Einführung in die Theorie quantisierter Felder, Moskau 1957 (russ.); N. N. Bogoljubow, B. W. Medwedew u. M. K. Poliwanow, Fragen der Theorie der Dispersionsbeziehungen, im Erscheinen, deutsche Übersetzung in Fortschritte der Physik, im Erscheinen.

[2] A. A. Logunow, Dokl. Akad. Nauk, SSSR, im Druck.

darstellung für $t \to +\infty$ wählen. Dann erhalten wir

$$i \frac{\delta S}{\delta \varphi(t)} S^+ = U(\infty, t)\, J(t)\, U^+(t, \infty) = j(t). \quad (6)$$

$j(t)$ ist der Strom in HEISENBERG-Darstellung, der für $t \to +\infty$ mit $J(t)$ zusammenfällt.

Das Matrixelement von $i \frac{\delta S}{\delta \varphi(t)} S^+ \left(= -i S \frac{\delta S^+}{\delta \varphi(t)} \right)$ besitzt die Form

$$\left\langle \alpha' \middle| i \frac{\delta S}{\delta \varphi(t)} S^+ \middle| \alpha \right\rangle = \langle \alpha' | j(t) | \alpha \rangle . \quad (7)$$

$|\alpha\rangle$ sind die Zustandsvektoren in Wechselwirkungsdarstellung. Aus (6) folgt, daß

$$\frac{\delta j(t)}{\delta \varphi'(t')} = 0 \quad \text{für} \quad t' < t. \quad (8\,\text{a})$$

Für den Operator $-i S^+ \frac{\delta S}{\delta \varphi(t)} \left(= +i \frac{\delta S^+}{\delta \varphi(t)} S \right)$

erhält man mittels (5)

$$-i S^+ \frac{\delta S}{\delta \varphi(t)} = -S^+ j(t)\, S \equiv \lambda(t) . \quad (9)$$

Für $\lambda(t)$ gilt

$$\frac{\delta \lambda(t)}{\delta \varphi'(t')} = 0 \quad \text{für} \quad t' > t. \quad (8\,\text{b})$$

(8 a) und (8 b) benutzen wir als Kausalitätsbedingung für den betrachteten nichtrelativistischen Fall. Die Formulierung einer solchen Kausalitätsbedingung für das zeitliche Verhalten des Systems ist möglich, da es sich um eine nichtrelativistische und nur in räumlicher Hinsicht nichtlokale Theorie handelt. Die Kausalitätsbedingung besagt, daß das Verhalten in der Vergangenheit nicht von der Zukunft abhängen kann.

Die beiden Ausdrücke (8 a, b) sind natürlich nicht unabhängig voneinander, wie z. B. aus Gl. (17) hervorgeht. Sie werden es ermöglichen, Aussagen über das Verhalten des retardierten bzw. avancierten Matrixelementes in der komplexen Ebene zu machen.

Die Variation der S-Matrix nach dem Feld des einfallenden Mesons $\varphi_{\gamma\varrho}(t) = \varphi(t)$ und die Benutzung der Stabilitätsbedingung

$$S|\alpha\rangle = |\alpha\rangle ,$$

wobei $|\alpha\rangle$ der Vakuum- oder ein Einteilchen-Zustand ist, führt zu dem folgenden Ausdruck für das Matrixelement des betrachteten Prozesses:

$$\begin{aligned} S_{2\pi,\pi} &= \langle s', \mathfrak{q}', \mathfrak{q}'' | S | s, \mathfrak{q} \rangle \\ &= \frac{i v \mathfrak{q}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E}} \int \mathrm{d}t \left\langle s', \mathfrak{q}', \mathfrak{q}'' \middle| \frac{\delta S}{\delta \varphi(t)} \middle| s \right\rangle e^{-iEt} \\ &= \frac{v \mathfrak{q}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E}} \int \mathrm{d}t \, \langle s', \mathfrak{q}', \mathfrak{q}'' | j(t) | s \rangle \, e^{-iEt}. \end{aligned}$$

$|s, \mathfrak{q}\rangle$ kennzeichnet den Zustand des ruhenden Nukleons und des einfallenden Mesons. Analog bezeichnet $\langle s', \mathfrak{q}', \mathfrak{q}''|$ den entstehenden Endzustand.

Die Durchführung der Variationen nach den Feldern der beiden ausfallenden Mesonen und die Benutzung der Translationsinvarianz ergibt

$$S_{2\pi,\pi} = -2\pi i\, \delta(E'' + E' - E) \frac{v\, v'\, v''}{\sqrt{8\, E\, E'\, E''}} T^{\mathrm{ret}}_{\beta\alpha}(E', E'') , \quad (10)$$

wobei
$$T^{\mathrm{ret}}_{\beta\alpha}(E', E'') = \frac{\mathfrak{q}\, \mathfrak{q}'\, \mathfrak{q}''}{(2\pi)^{9/2}} \int \mathrm{d}t'\, \mathrm{d}t'' \left\langle s \middle| \frac{-i\, \delta^2 j(0)}{\delta \varphi'(t')\, \delta \varphi''(t'')} \middle| s \right\rangle e^{iE't' + iE''t''}. \quad (11)$$

$\alpha \equiv (\mathfrak{q}, \gamma, \varrho; s)$ bzw. $\beta \equiv (\mathfrak{q}', \mathfrak{q}''; \gamma', \gamma''; \varrho', \varrho''; s')$ kennzeichnen die Impulse und die Spin- und Isotopen-Indizes der Teilchen des Anfangs- bzw. Endzustandes.

Für das hermitesch konjugierte Matrixelement $S^+_{2\pi,\pi}$ erhält man auf analoge Weise den folgenden Ausdruck:

$$S^+_{2\pi,\pi} = +2\pi i\, \delta(E'' + E' - E) \frac{v\, v'\, v''}{\sqrt{8\, E\, E'\, E''}} T^{\mathrm{av}}_{\beta\alpha}(E', E'') , \quad (12)$$

wobei
$$T^{\mathrm{av}}_{\beta\alpha}(E', E'') = \frac{\mathfrak{q}\, \mathfrak{q}'\, \mathfrak{q}''}{(2\pi)^{9/2}} \int \mathrm{d}t'\, \mathrm{d}t'' \left\langle s' \middle| \frac{+i\, \delta \lambda(0)}{\delta \varphi'(t')\, \delta \varphi''(t'')} \middle| s \right\rangle e^{iE't' + iE''t''} \quad \text{und} \quad T^{\mathrm{av}}_{\beta\alpha} = T^{+\mathrm{ret}}_{\beta\alpha}. \quad (13)$$

II. Untersuchung der Funktionen $T^{\mathrm{ret}}(E', E'')$ und $T^{\mathrm{av}}(E', E'')$

Setzt man die Funktion $T^{\mathrm{ret}}(E', E'')$, die zunächst nur für E', $E'' \geqq \mu$ definiert ist ($\mu \sim \pi$-Mesonenmasse), ins Komplexe fort, d. h. $E' \to E' = a' + i b'$, $E'' \to E'' = a'' + i b''$, so erkennt man auf Grund der Kausalitätsbedingung (8 a), daß $T^{\mathrm{ret}}(E', E'')$ für $b' > 0$, $b'' > 0$ eine analytische Funktion von E', E'' ist.

Unter Benutzung der Kausalitätsbedingung (8 b) sieht man, daß $T^{\mathrm{av}}(E',E'')$ für $b'<0$, $b''<0$ eine analytische Funktion von E', E'' ist.

Für die Aufstellung der Dispersionsbeziehung ist es weiter erforderlich, die Differenz der Funktionen (11) und (13) für reelle Werte der Argumente zu untersuchen.

Die Differenz

$$\overline{T}(E',E'') = T^{\mathrm{ret}}(E',E'') - T^{\mathrm{av}}(E',E'')$$

ist im wesentlichen der antihermitesche Teil der Amplitude $T^{\mathrm{ret}}(E',E'')$, was sofort aus

$$T^{\mathrm{ret}} = \tfrac{1}{2}(T^{\mathrm{ret}} + T^{+\,\mathrm{ret}}) + \tfrac{1}{2}(T^{\mathrm{ret}} - T^{+\,\mathrm{ret}}) = D + i\,A\,,$$
$$T^{+\,\mathrm{ret}} = T^{\mathrm{av}} \quad \text{folgt.} \tag{14}$$

Wir schreiben $\overline{T}_{\beta\alpha}(E',E'')$ in der folgenden Form:

$$\overline{T}_{\beta\alpha}(E',E'') = \frac{\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}'\,\mathfrak{q}''}{2(2\pi)^{9/2}} \int \mathrm{d}t'\,\mathrm{d}t'' \Big\langle s' \Big| -\frac{\delta}{\delta\varphi''(t'')}\, i \left\{\frac{\delta j(0)}{\delta\varphi'(t')} + \frac{\delta\lambda(0)}{\delta\varphi'(t')}\right\} - \frac{\delta}{\delta\varphi'(t')}\, i \left\{\frac{\delta j(0)}{\delta\varphi''(t'')} + \frac{\delta\lambda(0)}{\delta\varphi''(t'')}\right\} \Big| s \Big\rangle e^{iE't'+iE''t''}. \tag{15}$$

Mit Hilfe von (9) und [3]

$$i\left\{\frac{\delta j(t)}{\delta\varphi'(t')} - \frac{\delta j'(t')}{\delta\varphi(t)}\right\} = j'(t')\,j(t) - j(t)\,j'(t') \tag{16}$$

ergibt sich die Beziehung

$$\frac{\delta\lambda(0)}{\delta\varphi'(t')} = -S^{+}\frac{\delta j'(t')}{\delta\varphi(0)}S\,. \tag{17}$$

Setzt man dies in (15) ein und benutzt wieder (16) sowie die Stabilitätsbedingung, so erhält man einen Ausdruck, der 6 Glieder der Form

$$\Big\langle s' \Big| \left\{\frac{\delta j''(t'')}{\delta\varphi'(t')} + \frac{\delta j'(t')}{\delta\varphi''(t'')}\right\} j(0) \Big| s \Big\rangle$$

enthält. Ihre Entwicklung nach einem vollständigen Funktionensystem führt zu der folgenden Beziehung, wobei $E'+E''=E$ ist (E', E'' reell):

$$\begin{aligned}
\overline{T}(E',E'';E) = \frac{\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}'\,\mathfrak{q}''}{2(2\pi)^{9/2}}\cdot 2\pi \sum_n \int \mathrm{d}t \Big\{ &-\delta(E_n-E)\left(\Big\langle s'\Big|\frac{\delta j'(\tau)}{\delta\varphi''(0)}\Big|n\Big\rangle e^{iE'\tau} + \Big\langle s'\Big|\frac{\delta j''(\tau)}{\delta\varphi'(0)}\Big|n\Big\rangle e^{iE''\tau}\right)\langle n|j(0)|s\rangle \\
&+\delta(E_n+E)\,\langle s'|j(0)|n\rangle\left(\Big\langle n\Big|\frac{\delta j''(0)}{\delta\varphi'(\tau)}\Big|s\Big\rangle e^{iE'\tau} + \Big\langle n\Big|\frac{\delta j'(0)}{\delta\varphi''(\tau)}\Big|s\Big\rangle e^{iE''\tau}\right) \\
&+\delta(E_n+E')\left(\Big\langle s'\Big|\frac{\delta j''(\tau)}{\delta\varphi(0)}\Big|n\Big\rangle e^{iE''\tau} + \Big\langle s'\Big|\frac{\delta j(\tau)}{\delta\varphi''(0)}\Big|n\Big\rangle e^{-iE\tau}\right)\langle n|j'(0)|s\rangle \\
&-\delta(E_n-E')\,\langle s'|j'(0)|n\rangle\left(\Big\langle n\Big|\frac{\delta j(0)}{\delta\varphi''(\tau)}\Big|s\Big\rangle e^{iE''\tau} + \Big\langle n\Big|\frac{\delta j''(0)}{\delta\varphi(\tau)}\Big|s\Big\rangle e^{-iE\tau}\right) \\
&+\delta(E_n+E'')\left(\Big\langle s'\Big|\frac{\delta j'(\tau)}{\delta\varphi(0)}\Big|n\Big\rangle e^{iE'\tau} + \Big\langle s'\Big|\frac{\delta j(\tau)}{\delta\varphi'(0)}\Big|n\Big\rangle e^{-iE\tau}\right)\langle n|j''(0)|s\rangle \\
&-\delta(E_n-E'')\,\langle s'|j''(0)|n\rangle\left(\Big\langle n\Big|\frac{\delta j'(0)}{\delta\varphi(\tau)}\Big|s\Big\rangle e^{-iE\tau} + \Big\langle n\Big|\frac{\delta j(0)}{\delta\varphi'(\tau)}\Big|s\Big\rangle e^{iE'\tau}\right)\Big\}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Die Beziehung (18) genügt den für den Prozeß $\pi+\mathrm{N}\rightarrow\pi'+\pi''+\mathrm{N}'$ erforderlichen Symmetriebedingungen (Vertauschung der erzeugten Mesonen, Crossing-Symmetrie; siehe Abschnitt IV).

Zur Untersuchung des Spektrums von $T_{\beta\alpha}(E',E'')$ soll zu neuen Variablen übergegangen werden:

$$E = E' + E'', \qquad \varDelta = E' - E'',$$
$$\text{d. h.} \quad E' = \tfrac{1}{2}(E+\varDelta), \qquad E'' = \tfrac{1}{2}(E-\varDelta). \tag{19}$$

Man sieht, daß $T^{\mathrm{ret}}_{\beta\alpha}(E,\varDelta)$ bzw. $T^{\mathrm{ret}}_{\beta\alpha}(E,\varDelta)$ für reelles $\varDelta$ analytische Funktionen in der oberen bzw. unteren Halbebene von E sind. Wir untersuchen

[3] Siehe Anm. [1]. Man vergleiche an dieser Stelle die im relativistischen Falle üblicherweise benutzte Form der Kausalitätsbedingung (Kommutator raumartig gelegener Operatoren gleich Null) mit der von BOGOLJUBOW [1] formulierten allgemeingültigen Kausalitätsbedingung. Beim Übergang zum nichtrelativistischen Fall verliert die erstere ihre Anwendungsmöglichkeit, während die Form der zweiten erhalten bleibt.

demgemäß das Verhalten von $T_{\beta\alpha}(E, \varDelta)$ auf der reellen E-Achse. $\varDelta$ werden wir als einen reellen Parameter betrachten.

Wenn wir elektromagnetische und schwache Wechselwirkungen vernachlässigen und $|\varDelta| < \mu$ annehmen, erhalten wir das in Abb. 1 gezeigte Energiespektrum. Die Pol-Beiträge stammen von dem Ein-Nukleonen-Glied ($n = 0$, $E = 0$). Bei $|E| \geqq \mu$, $n \geqq 1$ beginnt das kontinuierliche Spektrum.

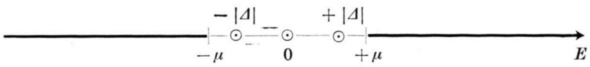

Abb. 1. Energiespektrum für den Fall $|\varDelta| < \mu$.

Falls $|\varDelta| \geqq 2\mu$ ist, dehnt sich der Schnitt über die gesamte reelle Achse aus. Machen wir die Annahme $|\varDelta| < 2\mu$, so können sich die Pole und das kontinuierliche Spektrum überdecken. Auf einem endlichen Abschnitt der reellen Achse ist jedoch die Differenz der Funktionen T^{ret} und T^{av} immer Null.

Da $T^{\mathrm{ret}}(E, \varDelta)$ in der oberen und $T^{\mathrm{av}}(E, \varDelta)$ in der unteren Hälfte der komplexen E-Ebene analytisch ist, gelangen wir unter der Annahme $|\varDelta| < 2\mu$ zu der Aussage, daß für komplexe E $T^{\mathrm{ret}}(E, \varDelta)$ und $T^{\mathrm{av}}(E, \varDelta)$ eine einheitliche analytische Funktion von E definieren, die nur auf der reellen Achse Schnitte und Pole besitzt. Wir bezeichnen diese Funktionen mit $\tilde{T}(E, \varDelta)$.

Für reelle E gilt dann

$$\lim_{\delta \to +0} \tilde{T}(E \pm i\delta, \varDelta) = \begin{matrix} T^{\mathrm{ret}}(E, \varDelta) \\ T^{\mathrm{av}}(E, \varDelta) \end{matrix} \qquad (|\varDelta| < 2\mu) .$$

III. Die Dispersionsbeziehung

Wenn wir annehmen, daß die Amplitude des Prozesses $\pi + \mathrm{N} \to \pi' + \pi'' + \mathrm{N}'$ für $E \to \infty$ wie $1/E$ oder stärker abnimmt[4] und wir infolgedessen die CAUCHYsche Integralformel in der Form

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z')}{z' - z} \, \mathrm{d}z'$$

auf $T(E, \varDelta)$ anwenden können, so erhalten wir die Dispersionsbeziehung

$$D_{\beta\alpha}(E, \varDelta) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_{\beta\alpha}(\varepsilon, \varDelta)}{\varepsilon - E} \, \mathrm{d}\varepsilon . \tag{20}$$

$D_{\beta\alpha}(E, \varDelta)$ und $A_{\beta\alpha}(E, \varDelta)$ sind der hermitesche und der antihermitesche Teil der Erzeugungsamplitude.

Falls die Amplitude sich für $E \to \infty$ z. B. proportional E verhält, läßt sich die entsprechende Dispersionsbeziehung ebenfalls sofort angeben, wobei zur Beseitigung des Pol-Beitrages im Unendlichen das von den Dispersionsbeziehungen für die elastische Streuung bekannte Abzugsverfahren durchgeführt werden muß.

Der physikalische Bereich bei der in (20) auftretenden Integration ist durch $E \geqq |\varDelta| + 2\mu$ gegeben. Man erhält diese Beziehung, wenn man beachtet, daß für eine bestimmte Dispersionsbeziehung $E' - E'' = \varDelta = \mathrm{const}$.

Die Beseitigung der Integration über die negativen Energien gelingt durch Anwendung der Beziehungen[5]

$$\begin{aligned} T_{\beta\alpha}(-E, \varDelta) &= P(\mathrm{N}, \mathrm{N}') \, T_{\alpha\beta}(E, -\varDelta) \\ \text{bzw.} \quad A_{\beta\alpha}(-E, \varDelta) &= P(\mathrm{N}, \mathrm{N}') \, \overset{*}{A}_{\beta\alpha}(E, -\varDelta) . \end{aligned} \tag{21}$$

$P(\mathrm{N}, \mathrm{N}')$ vertauscht die Spin- und Isotopen-Indizes des Nukleons im Anfangs- und im Endzustand. $\overset{*}{A}_{\beta\alpha}$ ist das komplex-konjugierte Matrixelement von $A_{\beta\alpha}$.

Wie aus Abb. 1 zu ersehen ist, besitzt der nichtbeobachtbare Bereich $|E| < |\varDelta| + 2\mu$ für $|\varDelta| < \mu$ drei isolierte Pole sowie ein kontinuierliches Spektrum im Gebiet $\mu \leqq |E| < |\varDelta| + 2\mu$.

Die Berechnung der Pol-Beiträge ergibt den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} I(E', E''; E) \equiv {} & \frac{1}{\pi} P \int_{-\mu}^{+\mu} \frac{A_{\beta\alpha}(\varepsilon, \varDelta)}{\varepsilon - E} \, \mathrm{d}\varepsilon \\ = {} & \sum_{\sigma} \Big\{ \frac{1}{E} \Big[D^{r' r''}_{s' \sigma} \Big(\frac{\varDelta}{2}\Big) t_{\sigma s} + t_{s' \sigma} D^{r' r''}_{\sigma s} \Big(\frac{\varDelta}{2}\Big) \Big] \\ & - \frac{1}{E'} \big[D^{r r''}_{s' \sigma}(\varDelta) \, t'_{\sigma s} + t'_{s' \sigma} D^{r r''}_{\sigma s}(\varDelta) \big] \\ & - \frac{1}{E''} \big[D^{r' r}_{s' \sigma}(\varDelta) \, t''_{\sigma s} + t''_{s' \sigma} D^{r' r}_{\sigma s}(\varDelta) \big] \Big\} , \end{aligned} \tag{22}$$

falls $|\varDelta| < \mu$.

Für $\varepsilon \geqq \mu$ ist $D^{r' r''}_{s' \sigma}(\varepsilon)$ hierbei der hermitesche Teil der Amplitude der elastischen Streuung[6] in Fixed-Nukleon-Näherung:

$$T^{r' r''}_{s' \sigma}(\varepsilon) = \frac{\mathfrak{q}' \, \mathfrak{q}''}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}\tau \left\langle s' \left| \frac{\delta j''(0)}{\delta \varphi'(\tau)} \right| \sigma \right\rangle e^{i \varepsilon \tau} .$$

Falls $\varepsilon < \mu$, kann D mit Hilfe der Dispersionsbeziehung für diesen Prozeß berechnet werden. r, r', r''

[4] Wir werden in Abschnitt IV sehen, daß diese Annahme zu den üblicherweise benutzten CHEW–LOW-Gleichungen führt.

[5] Siehe Abschnitt IV.

[6] A. A. LOGUNOW u. A. N. TAWXELIDSE, Mitt. Akad. Wiss. Grusin. SSSR 18, 19 u. 533 [1957].

sind die Spin- und Isotopen-Indizes der Mesonen. σ kennzeichnet die möglichen intermediären Spin- und Isotopen-Zustände des Nukleons. Ferner schreiben wir

$$t_{\sigma s}=i\frac{\mathfrak{q}}{(2\pi)^{3/2}}\langle\sigma|j(0)|s\rangle\,.$$

Das kontinuierliche Spektrum des nichtbeobachtbaren Bereiches enthält Beiträge der Glieder $n=1$ und $n=2$. Dabei ist $E_1\geqq\mu$ und $E_2\geqq 2\mu$. Für $\Delta=0$ treten Beiträge von $n=2$ nur in den beiden Gliedern auf, die von den beiden ersten Zeilen der rechten Seite von (18) stammen.

Die Dispersionsbeziehung nimmt damit die Form an

$$D_{\beta\alpha}(E',E'';E)=\frac{1}{\pi}P\int_{|\Delta|+2\mu}^{\infty}\left\{\frac{A_{\beta\alpha}(\varepsilon,\Delta)}{\varepsilon-E}-\frac{P(\mathrm{N},\mathrm{N}')\,\overset{*}{A}_{\beta\alpha}(\varepsilon,-\Delta)}{\varepsilon+E}\right\}\mathrm{d}\varepsilon+I(E',E'';E)$$
$$+\frac{1}{2\pi i}P\int_{\mu}^{|\Delta|+2\mu}\left\{\frac{T_{\beta\alpha}(\varepsilon,\Delta)}{\varepsilon-E}-\frac{P(\mathrm{N},\mathrm{N}')\,\overline{T}_{\alpha\beta}(\varepsilon,-\Delta)}{\varepsilon+E}\right\}\mathrm{d}\varepsilon\,,\quad \text{wobei } |\Delta|<\mu\,. \quad (23)$$

Drückt man die in dem letzten Integral auftretenden Glieder der Form $\langle\sigma,\mathfrak{q}_1|\delta j''/\delta\varphi'|s\rangle$ wieder durch den hermiteschen und antihermiteschen Teil der Erzeugungsamplitude aus, und vernachlässigt man den im nichtbeobachtbaren Teil des Spektrums gelegenen Beitrag des Gliedes $n=2$, so erhält man Integralgleichungen zwischen den Größen $D_{\beta\alpha}(E,\Delta)$ und $A_{\beta\alpha}(E,\Delta)$.

Aus den Darlegungen ist ersichtlich, daß man auf Grund des im nichtbeobachtbaren Bereich gelegenen kontinuierlichen Spektrums die gewonnene Dispersionsbeziehung für den Prozeß $\pi+\mathrm{N}\to\pi'+\pi''+\mathrm{N}'$ nicht in der von der elastischen Streuung bekannten einfachen Weise auswerten kann. Das wäre auch durch das Fehlen eines „Optischen Theorems" $[A^{\mathrm{el.}}=(k/4\pi)\,\sigma]$ für den betrachteten Prozeß sehr erschwert.

IV. Chew–Low-Gleichung

Mittels der gewonnenen Beziehungen ist es leicht möglich, Gleichungen vom Chew–Low-Typ für den Prozeß $\pi+\mathrm{N}\to\pi'+\pi''+\mathrm{N}'$ aufzustellen. Dazu gehen wir von den in (18) auftretenden Matrixelementen der Form $\langle s'|\delta j'/\delta\varphi''|n\rangle$ zu den kausalen Matrixelementen über. Wir erreichen das durch geeignete Addition und Subtraktion von Ausdrücken der Art $\langle s'|j''j'j|s\rangle$ und Benutzung der Beziehungen (siehe Anm. [1]):

$$i\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi'\,\delta\varphi''}S^+=\frac{\delta j'}{\delta\varphi''}-i\,j'j'',$$
$$-i\,S\frac{\delta^2 S^+}{\delta\varphi'\,\delta\varphi''}=\frac{\delta j'}{\delta\varphi''}+i\,j''j'\,.$$

Der erste Ausdruck auf der rechten Seite von (18) nimmt damit die Form an

$$-2\pi\sum_n\delta(E_n-E)\int\mathrm{d}\tau\,\frac{\mathfrak{q}'\,\mathfrak{q}''}{(2\pi)^3}\left\langle s'\left|-i\frac{\delta^2S^+}{\delta\varphi''(\tau)\,\delta\varphi'(0)}\right|n\right\rangle e^{iE''\tau}\frac{\mathfrak{q}}{(2\pi)^{3/2}}\left\langle n\left|i\frac{\delta S}{\delta\varphi(0)}\right|s\right\rangle$$
$$=-2\pi i\sum_n\delta(E_n-E)\,T^+(E',E'';E_n)\,T(E_n;E)\,.$$

Die Impuls-, Spin- und Isotopen-Indizes wurden im letzten Ausdruck weggelassen.

Setzt man den so gewonnenen Ausdruck für $A_{\beta\alpha}$ in die Dispersionsbeziehung (20) ein, und führt man die Integration mit Hilfe der δ-Funktionen explizit durch, so erhält man einen Ausdruck für $D_{\beta\alpha}$. Benutzt man die Beziehung

$$\frac{1}{x+i\,\delta}=P\frac{1}{x}-i\pi\,\delta(x)\,,$$

so kann man damit $T^{\mathrm{ret}}_{\beta\alpha}=D_{\beta\alpha}+i\,A_{\beta\alpha}$ in der folgenden Form zusammenfassen, wobei wir $T^{\mathrm{ret}}_{\beta\alpha}=T_{\beta\alpha}$ schreiben:

$$
\begin{aligned}
T_{\beta\alpha}(E',E'';E) = -\sum_n \Big\{ & \frac{[T^+(\varepsilon',\varepsilon'';E_n)\,T(E_n;\varepsilon)]_{\varepsilon=E_n}}{E_n-E-i\,\delta} - \frac{[T(-\varepsilon;E_n)\,T^+(E_n;-\varepsilon',-\varepsilon'')]_{\varepsilon=-E_n}}{E_n+E+i\,\delta} \\
+ & \frac{[T(-\varepsilon,\varepsilon'';E_n)\,T^+(E_n;-\varepsilon')]_{\varepsilon'=-E_n}}{E_n+E'+i\,\delta} - \frac{[T^+(\varepsilon';E_n)\,T(E_n;\varepsilon,-\varepsilon'')]_{\varepsilon'=E_n}}{E_n-E'-i\,\delta} \\
+ & \frac{[T(\varepsilon',-\varepsilon;E_n)\,T^+(E_n;-\varepsilon'')]_{\varepsilon''=-E_n}}{E_n+E''+i\,\delta} - \frac{[T^+(\varepsilon'';E_n)\,T(E_n;-\varepsilon',\varepsilon)]_{\varepsilon''=E_n}}{E_n-E''-i\,\delta} \Big\}.
\end{aligned}
$$

E', E'' sind durch (19) gegeben. Ferner ist

$$\varepsilon' \equiv \tfrac{1}{2}(\varepsilon+\Delta), \qquad \varepsilon'' \equiv \tfrac{1}{2}(\varepsilon-\Delta).$$

Die Beziehung (24) hat nur dann eine sinnvolle Bedeutung, wenn wir annehmen, daß die Erzeugungsamplitude für große E wie $1/E$ oder stärker abnimmt. Für Δ fordern wir $|\Delta|<2\,\mu$, da wir unter dieser Bedingung die Gültigkeit der Dispersionsbeziehung beweisen können.

Die aufgestellte Beziehung genügt den für den Prozeß notwendigen Symmetriebedingungen (Vertauschung der erzeugten Mesonen und Crossing-Symmetrie).

Man überzeugt sich von der Gültigkeit der Beziehung

$$T_{\beta\alpha}(E',E'';E) = P(\pi',\pi'')\,T_{\beta\alpha}(E'',E';E). \quad (25)$$

$P(\pi',\pi'')$ ist der Vertauschungsoperator für die Spin- und Isotopen-Indizes der beiden Mesonen π' und π''.

Zur Prüfung der Crossing-Symmetrie können wir $T_{\beta\alpha}(E',E'';E)$ in der Form $T_{\beta\alpha}(z',z'';z)$ schreiben, wobei durch die Variable z zum Ausdruck gebracht werden soll, daß die im Nenner stehenden Energien $+E$ einen imaginären Zusatz $+i\,\delta$ besitzen. Aus (24) sieht man dann, daß die folgenden Beziehungen gelten:

$$
\begin{aligned}
T_{\beta\alpha}(z',z'';z) &= P(\pi,\pi')\,T_{\beta\alpha}(-z,z'';-z') \\
&= P(\pi,\pi'')\,T_{\beta\alpha}(z',-z;-z'').
\end{aligned} \quad (26)
$$

Durch Aufstellung des Matrixelementes $T_{\alpha\beta}(E;E',E'')$ für den Umkehrprozeß $\pi'+\pi''+\mathrm{N}'\rightarrow\pi+\mathrm{N}$ erhält man die Beziehung

$$T_{\beta\alpha}(E',E'';E) = -P(\mathrm{N},\mathrm{N}')\,\overset{+}{T}_{\alpha\beta}(-E;-E',-E''),$$

aus der folgt:

$$
\begin{aligned}
T_{\beta\alpha}(z',z'';z) &= -P(\mathrm{N},\mathrm{N}')\,T_{\alpha\beta}(-z;-z',-z'') \\
&= -P(\mathrm{N},\mathrm{N}')\,P(\pi,\pi')\,T_{\alpha\beta}(z';z,-z'') \\
&= -P(\mathrm{N},\mathrm{N}')\,P(\pi,\pi'')\,T_{\alpha\beta}(z'';-z',z).
\end{aligned} \quad (27)
$$

Die Symmetriebedingungen (25), (26) und (27) sind für jedes einzelne Glied der Reihenentwicklung von (24) gültig.

Weiter ist zu beachten, daß man die Beziehung (18) als eine Form der Unitaritätsbedingung für die T-Matrix betrachten kann, die die Symmetrieeigenschaften des Prozesses berücksichtigt, und der infolgedessen auch Gl. (24) genügt.

Die übliche Form der Unitaritätsbedingung

$$\overset{+}{T}_{\beta\alpha}(E) - T_{\beta\alpha}(E) = 2\,\pi\,i\sum_n \delta(E_n-E)\,\overset{+}{T}_{\beta n}(E;E_n)\,T_{n\alpha}(E_n;E) \quad (28)$$

ist z. B. im Falle der elastischen Streuung gegenüber der die Crossing-Symmetrie zum Ausdruck bringenden Ersetzung[7] $z\rightarrow -z$, $(z=E+i\,\delta)$, $\alpha\rightleftarrows\beta$ (wobei die Nukleonenindizes ungeändert bleiben sollen), nicht invariant. Diese Ersetzung läßt die linke Seite von (28) invariant. Für die rechte Seite bedeutet der Übergang $z\rightarrow -z$ die Ersetzung $E\rightarrow -E$, $i\rightarrow -i$. Behandelt man die Ausdrücke

$$T_{\beta\alpha}(z) = P(\mathrm{N},\mathrm{N}')\,T_{\alpha\beta}(-z)$$

[bzw. $T_{\beta\alpha}(E) = P(\mathrm{N},\mathrm{N}')\,\overset{+}{T}_{\alpha\beta}(-E)$] bei der Ableitung der Unitaritätsbedingung für die T-Matrix völlig gleichberechtigt und symmetrisch, so tritt notwendigerweise ein zusätzliches Glied

$$-2\,\pi\,i\sum_n \delta(E_n+E)\,P(\mathrm{N},\mathrm{N}')\,\overset{+}{T}_{\alpha n}(-E;E_n)\,T_{n\beta}(E_n;-E)$$

[7] G. Chew u. F. Low, Phys. Rev. **101**, 1570 [1956].

auf. Der so entstehende Ausdruck ist invariant gegenüber der obigen Ersetzung.

Die im Falle der π-Mesonen-Erzeugung zusätzlich auftretenden Symmetrieeigenschaften werden bei Benutzung des Formalismus von BOGOLJUBOW automatisch berücksichtigt. Die T-Matrix des Prozesses genügt den Bedingungen (25), (26) und (27). Benutzt man diese Ausdrücke bei der Ableitung der Unitaritätsbedingung für die T-Matrix in völlig symmetrischer Weise, so nimmt sie die Form (18) an.

CHEW–LOW-Gleichungen für den Prozeß $\pi + N \rightarrow \pi' + \pi'' + N'$ wurden bereits von einigen Autoren [8–12] ohne besondere Untersuchung des mathematischen Verhaltens der benutzten Funktionen aufgestellt (und z. Tl. auch in der Ein-Mesonen-Näherung ausgewertet).

Unsere Untersuchungen, die das analytische Verhalten der Funktionen berücksichtigen, unterscheiden sich u. a. in den folgenden Punkten von diesen Arbeiten:

1. Durch die Benutzung der Dispersionsbeziehung zur Gewinnung von (24) ist auch beim hermiteschen Teil der Amplitude der Energiesatz stets erfüllt.

2. Die Beziehung (24) gilt nur, falls $T_{\beta a}$ für $E \rightarrow \infty$ wie $1/E$ oder stärker abnimmt. Verhält sich $T_{\beta a}$ für hohe Energien z. B. proportional E (wie aus den Experimenten folgt), so muß man eine dieser Annahme entsprechende Dispersionsbeziehung benutzen, wobei zur Beseitigung des dabei auftretenden Polynoms ersten Grades das von den Dispersionsbeziehungen für die elastische Streuung bekannte Abzugsverfahren durchgeführt werden muß. Bei Benutzung eines Abschneidefaktors $v(|\mathfrak{q}|)$ – und der damit verbundenen Näherung – kann man aber stets ein Verhalten $1/E$ annehmen, so daß man in diesem Falle mit der einfachsten Annahme auskommen kann.

Die Autoren danken Herrn Prof. BOGOLJUBOW für das stete Interesse an der Durchführung dieser Arbeit. Dr. LOGUNOW und Dr. TAWXELIDSE möchten wir unseren Dank für zahlreiche ausführliche Diskussionen zum Ausdruck bringen. Einer der Autoren (W. Z.) dankt ferner Dr. KASCHLUHN für wertvolle Gespräche.

[8] S. BARSHAY, Phys. Rev. **103**, 1102 [1956].
[9] J. FRANKLIN, Phys. Rev. **105**, 1101 [1957].
[10] L. RODBERG, Phys. Rev. **106**, 1090 [1957].
[11] R. OMNES, Nuovo Cim. **5**, 983 [1957].
[12] R. OMNES, Nuovo Cim. **6**, 780 [1957].

Die $(\beta\gamma)$-zirkulare Polarisationskorrelation von Sc^{46}

Von W. JÜNGST und H. SCHOPPER

Aus dem Physikalischen Institut, Erlangen, jetzt Institut für Kernphysik, Mainz

(Z. Naturforschg. **13 a**, 505—507 [1958]; eingegangen am 23. Juni 1958)

The $(\beta\gamma)$ circular polarization correlation for the mixed β-transition of Sc^{46} was measured as a function of electron energy. An asymmetry coefficient $A = +0{,}24 \pm 0{,}04$ was found which is somewhat lower than that given by other authors. Thus no conclusion about time reversal invariance can be drawn. However, the ratio of matrix elements and their relative phase was determined.

LEE und YANG [1] wiesen schon in ihrer ersten grundlegenden Arbeit darauf hin, daß infolge der Nichterhaltung der Parität beim β-Zerfall eine dem β-Zerfall folgende γ-Strahlung im allgemeinen zirkular polarisiert ist. Dies konnte erstmalig experimentell an den reinen GT-Übergängen von Co^{60} und Na^{22} nachgewiesen werden [2], und spätere Messungen [3] lieferten einen guten Hinweis dafür, daß die Paritätsverletzung maximal ist. Weitere Aussagen über die Art der β-Wechselwirkung und über Kernmatrixelemente kann man aus der Untersuchung von gemischten β-Übergängen erhalten. In diesem Falle gilt für erlaubte β-Übergänge für die Winkelkorrelation die Beziehung

$$W(\Theta, \tau) = 1 + A\,\tau\,(v/c)\cos\Theta \qquad (1)$$

($\tau = +1$ bzw. -1 für Quanten mit Spin parallel bzw. antiparallel zur Flugrichtung, v und c Geschwindigkeit der β-Teilchen und des Lichtes, Θ Winkel zwischen Emissionsrichtung des β-Teilchens und des

[1] T. D. LEE u. C. N. YANG, Phys. Rev. **104**, 254 [1956].
[2] H. SCHOPPER, Phil. Mag. **2**, 710 [1957].
[3] H. APPEL, H. SCHOPPER u. S. D. BLOOM, Phys. Rev. **109**, 2211 [1958].